

LBRIS

We know
books

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică
algebră
geometrie

clasa a VI-a

partea a II-a

ediția a XI-a



mate 2000 – consolidare

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI	5
1.1. Număr întreg. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg.	
Reprezentarea pe axă a numerelor întregi	5
1.2. Modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi	10
Recapitulare și sistematizare prin teste	14
Test de autoevaluare	15
1.3. Adunarea numerelor întregi. Scăderea numerelor întregi	17
1.4. Proprietățile adunării numerelor întregi	20
Recapitulare și sistematizare prin teste	23
Test de autoevaluare	25
1.5. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți	27
1.6. Împărțirea numerelor întregi	32
Recapitulare și sistematizare prin teste	35
Test de autoevaluare	37
1.7. Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural. Reguli de calcul cu puteri	39
1.8. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	43
Recapitulare și sistematizare prin teste	47
Test de autoevaluare	49
1.9. Rezolvarea unor ecuații în mulțimea numerelor întregi	51
1.10. Rezolvarea unor inecuații în mulțimea numerelor întregi	55
1.11. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor în contextul numerelor întregi	58
Recapitulare și sistematizare prin teste	61
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	62
Test de autoevaluare	65
Capitolul II. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE	67
2.1. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale	67
2.2. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, opusul unui număr rațional, modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale	72
Recapitulare și sistematizare prin teste	77
Test de autoevaluare	79
2.3. Adunarea și scăderea numerelor raționale. Proprietăți	81
2.4. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale. Proprietăți	86
2.5. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri	91

2.6. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	96
Recapitulare și sistematizare prin teste	99
Test de autoevaluare	101
2.7. Rezolvarea unor ecuații în mulțimea numerelor raționale	103
2.8. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	107
Recapitulare și sistematizare prin teste	110
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	112
Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare	116
Test de autoevaluare	117

GEOMETRIE

Capitolul I. TRIUNGHIUL	119
1.1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului	119
1.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior	123
1.3. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului	126
1.4. Linii importante în triunghi. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi	130
1.5. Linii importante în triunghi. Mediatoarele laturilor unui triunghi	134
1.6. Linii importante în triunghi. Înălțimile unui triunghi	136
1.7. Linii importante în triunghi. Medianele unui triunghi	138
1.8. Congruența triunghiurilor oarecare	140
1.9. Criteriile (cazurile) de congruență a triunghiurilor	142
1.10. Metoda triunghiurilor congruente	145
Recapitulare și sistematizare prin teste	148
Test de autoevaluare	151
1.11. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice	153
1.12. Aplicații. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment	156
Recapitulare și sistematizare prin teste	160
Test de autoevaluare	163
1.13. Proprietățile triunghiului isoscel	165
1.14. Proprietățile triunghiului echilateral	168
1.15. Proprietățile triunghiului dreptunghic	170
1.16. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora	175
Recapitulare și sistematizare prin teste	177
Test de autoevaluare	179

TESTE RECAPITULATIVE 181

MODELE DE TESTE FINALE 186

PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ȘCOLARE 196

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 201

LB

BRIS

We know books

Capitolul I

Mulțimea numerelor întregi

PP Competențe specifice

- C₁. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
- C₂. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
- C₃. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi
- C₄. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi
- C₅. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi
- C₆. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului

PE-PP

1.1. Număr întreg. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi



La televizor sau la radio auziți zilnic „buletinul meteo”.

Temperaturile pot fi **pozitive**, **zero** sau **negative**.

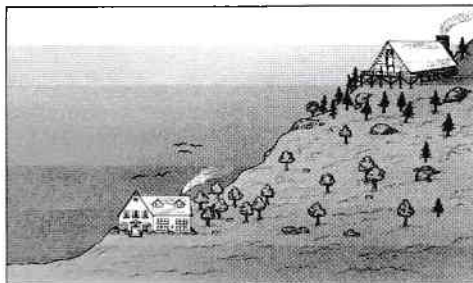
- +3° C se citește „plus 3 grade Celsius”
- +28° C se citește „plus 28 de grade Celsius”
- 5° C se citește „minus 5 grade Celsius”
- 14° C se citește „minus 14 grade Celsius”

Temperaturile negative, zero sau pozitive se înregistrează cu ajutorul **termometrului**.



Dacă dorim să știm înălțimea unui munte sau reperele unei epave de pe fundul oceanului, înseamnă că dorim să știm **altitudinea**. Altitudinea se măsoară luând ca reper **nivelul mării**, care este considerat zero (0) metri.

Vârful unui deal sau înălțimea unui munte se exprimă **printr-un număr precedat de**



semnul „+”, iar un punct de pe fundul unui ocean se exprimă **printr-un număr precedat de semnul „-”**.

În cadrul firmelor comerciale se folosesc noțiunile de **credit**, **debit** și **sold**.

Exemple:

1. În luna septembrie, o firmă a încasat 10 000 lei pe marfa vândută (**creditul** este +10 000 lei) și a cheltuit 5000 lei (**debitul** este -5000 lei). **Soldul** acestei luni este pozitiv, adică +5000 lei, deoarece s-a încasat mai mult cu 5000 lei decât s-a cheltuit.

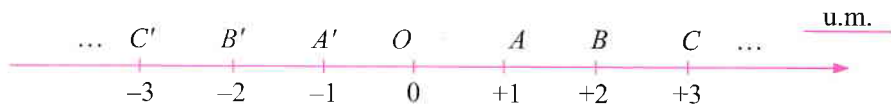
2. În luna octombrie, o firmă a încasat 300 000 lei (**creditul** este +300 000 lei) și a cheltuit 400 000 lei (**debitul** este -400 000 lei). **Soldul** acestei luni este negativ, adică -100 000 lei, deoarece s-a încasat mai puțin cu 100 000 lei decât s-a cheltuit.

În exemplele date s-au întâlnit numere precedate de semnul „+” sau de semnul „-”. Aceste numere sunt **numere întregi**.

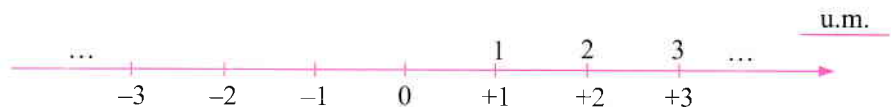
Se numește **număr întreg** numărul natural 0 sau orice număr natural diferit de 0 precedat fie de semnul „+” (plus), fie de semnul „-” (minus).

Observații:

- Mulțimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$.
- Mulțimea $\{+1, +2, +3, \dots\}$ este o submulțime a mulțimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}_+$ și se numește **mulțimea numerelor întregi pozitive**.
- Mulțimea $\{-1, -2, -3, \dots\}$ este o submulțime a mulțimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}_-$ și se numește **mulțimea numerelor întregi negative**.
- Mulțimea numerelor întregi negative împreună cu mulțimea numerelor întregi pozitive și cu numărul natural 0 formează mulțimea numerelor întregi, adică, avem: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ și notăm $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- Mulțimea $\{0; +1; +2; +3; \dots\}$ se numește **mulțimea numerelor întregi nenegative**.
- Se numește **opusul unui număr întreg diferit de zero** acel număr întreg care se obține din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0. Opusul numărului întreg +2 este numărul întreg -2, iar opusul numărului întreg -5 este numărul întreg +5.
- Numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor. **Axa numerelor** este o dreaptă pe care am fixat: un punct numit **origine**, un **sens pozitiv** și o **unitate de măsură**.



Să reprezentăm pe axa numerelor și numerele naturale.



Se observă că orice număr natural n coincide cu numărul întreg $+n$ și notăm $+n = n$. Astfel, se poate scrie $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$ sau $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

- **Numărul 0 nu este nici pozitiv și nici negativ.**
- **Numerele întregi negative** sunt folosite pentru a descrie: adâncimi sub nivelul mării, temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheț, datorii.

Exemple:

1. În ziua de 2 februarie 2009, la ora 6 dimineața, temperatura a fost de -9°C (minus 9 grade Celsius).
2. În Oceanul Atlantic s-a găsit, la adâncimea de 4375 m, o epavă. Adâncimea poate fi exprimată ca fiind -4375 m, raportată la nivelul mării.
3. Pasul Predeal se află la înălțimea de 1040 m. Altitudinea Pasului Predeal, raportată la nivelul mării, poate fi exprimată ca fiind $+1040$ m.
4. Dacă încasările unei societăți comerciale au fost de 5 milioane lei și plățile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este de 2 milioane lei ($+2$ milioane lei).
5. Dacă încasările unei societăți comerciale au fost de 2 milioane lei și plățile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este negativ (-1 milion lei), adică societatea are o datorie de 1 milion de lei.

Priviți axa numerelor și observați că există puncte egal depărtate de origine. Punctele A și A' , punctele B și B' sunt egal depărtate de originea axei. Dacă două numere nenule corespund pe axă la două puncte egal depărtate de punctul O (originea axei), atunci cele două numere sunt **opuse**.

Exemple:

1. Numerele -1 și 1 corespundătoare punctelor A' și A sunt opuse.
2. Numerele -3 și 3 corespundătoare punctelor C' și C sunt opuse.

În general, dacă notăm cu a un număr natural nenul, atunci:

- **opusul** numărului întreg pozitiv $+a$ este numărul întreg negativ $-a$;
- **opusul** numărului întreg negativ $-a$ este numărul întreg pozitiv $+a$.

Atenție!

- **Opusul** numărului negativ -3 se notează cu $-(-3)$ și este egal cu numărul pozitiv $+3$, adică $-(-3) = +3$.
- **Opusul** numărului pozitiv $+4$ se notează cu $-(+4)$ și este egal cu numărul negativ -4 , adică $-(+4) = -4$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Completați corect propozițiile:
 - a) Orice număr natural este ...
 - b) Opusul unui număr întreg diferit de zero este ...
 - c) Axa numerelor este ...
2. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi:
 - a) $-5; +1; 0; -1; +2; -4;$
 - b) $-7; +4; -3; 0; +13; -2; +5;$
 - c) $-5; -3; 4; -7; 3; +5;$
 - d) $50; -50; 30; -20; +20; 10; -10; 0.$

3. Precizați care dintre numerele de mai jos sunt naturale și care sunt întregi:

a) $-17; +3; 0; \frac{4}{2}; -13; 41;$

b) $-3; 0; 83; +15; +43; -17.$

4. Care dintre incluziunile următoare este corectă: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$?

Justificați. Dați exemple.

5. Se consideră mulțimea $A = \{-3, 0, 2\}$. Scrieți toate submulțimile mulțimii A .

6. Completați tabelele de mai jos:

a)

a	+3	-14	0	+11	-13	2	-3	4	-7	+5	-12
$-a$											

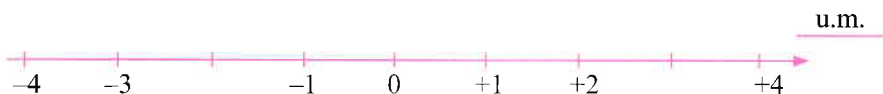
b)

a											
$-a$	-15	+13	0	-17	2	-1	1	-7	+5	+4	-5

c)

a	-3		0	+3			13		+4	-8	
$-a$		7			-14	+15		-12			-17

7. Pe o axă avem reprezentate numerele:



a) Scrieți numerele întregi pozitive reprezentate pe axă.

b) Scrieți numerele întregi negative reprezentate pe axă.

c) Scrieți perechile de numere întregi opuse reprezentate pe axă.

d) Sunt numere naturale reprezentate pe axă?

8. Scrieți mulțimea A , formată din opusele elementelor mulțimii:

a) $M = \{-2, +3, 0, -444, -3, +7, +2\};$

b) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 3\}.$

9. Precizați numerele care au, respectiv, opusele: $-7, +5, -3, 0, +2, -1, +6, -4.$

10. Scrieți câte trei elemente aparținând mulțimilor:

a) $\mathbb{N};$

b) $\mathbb{Z};$

c) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N};$

d) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N};$

e) $\mathbb{Z}_-;$

f) $\mathbb{Z}_+.$

PE Aplicare și exercitare **

11. Scrieți numerele întregi în fiecare dintre cazurile:

a) sunt mai mari decât -4 și mai mici decât $+3$;

b) sunt mai mici sau egale cu 4 și mai mari sau egale cu -3 ;

c) sunt cinci numere întregi consecutive, cel mai mic dintre ele fiind $-3.$

12. Fie șirul de numere întregi: $-14, -7, 0, \dots, 28.$

a) Completați numerele care lipsesc din șir.

b) Scrieți opusele numerelor din șir.

13. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2,5 \in \mathbb{Z};$

b) $-3,7 \notin \mathbb{Z};$

c) $\frac{1}{4} \in \mathbb{Z};$

d) $-4 \notin \mathbb{Z};$

e) $+2 \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z};$

f) $-7 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N};$

g) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z};$

h) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z};$

i) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset;$

j) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \emptyset;$

k) $+5 \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z};$

l) $-4 \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}.$

14. Fie mulțimea $M = \{-4; \frac{1}{4}; 3, (3); -7; 2; 0; +5\}$.

Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \mid x \in M \text{ și } x \in \mathbb{Z}\}; \quad B = \{x \mid x \in M \text{ și } x \in \mathbb{N}\}; \quad C = \{x \mid x \in M \text{ și } x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}.$$

15. Fie mulțimea $M = \{+5, -7, -4, 0, 2, -9, -1, +8, +3, 4\}$.

Precizați mulțimile următoare, enumerând elementele acestora:

a) $A = \{x \mid x \in M, x \text{ număr întreg nenegativ}\};$

b) $B = \{x \mid x \in M, x \text{ număr par}\};$

c) $C = \{x \mid x \in M, x \text{ număr negativ impar}\};$

d) $D = \{x \mid x \in M, x \text{ număr nenul par}\}.$

16. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq 2\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*, -2 \leq x < 4\}.$$

17. Reprezentați pe axa numerelor elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 4\};$

b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq -2 \text{ și } -2 \leq x < 4\};$

c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -7 \leq x \leq 2 \text{ și } -4 \leq x \leq -1\};$

d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -3 \text{ și } x \notin \mathbb{N}\}.$

PE Aprofundare și performanță ***

18. a) Scrieți numerele întregi negative pare mai mari decât -11 .

b) Scrieți numerele întregi negative impare cuprinse între -16 și -9 .

19. Scrieți 7 numere întregi consecutive în fiecare dintre cazurile:

a) cel mai mic este -3 ;

b) cel mai mare este $+5$;

c) exact patru dintre ele sunt nenegative.

20. Temperatura aerului la o altitudine de 2 350 m este de 7°C , iar la o altitudine de 4 350 m este de -3°C . Considerând că temperatura scade proporțional cu creșterea altitudinii, calculați câte grade ar fi la 5 150 m altitudine.

21. Se consideră punctele A, B, C, D, E și F de coordonate: $-5; +2; 1; -3; +4; -1$.

a) Luând ca unitate de măsură 1 cm, reprezentați pe o axă punctele.

b) Calculați distanța dintre punctele A și E , apoi distanța dintre punctele B și D și distanța dintre punctele E și F .

22. Se consideră punctele A și B de coordonate -5 și respectiv 3 .

a) Reprezentați pe o axă de coordonate cu originea în O punctele și notați cu M mijlocul segmentului AB .

b) Calculați $OA + OB + AM + AB$.

23. Se consideră două puncte A și B pe axa numerelor, ale căror coordonate sunt $-x$ și x .

a) Dacă punctul O reprezintă originea axei și $AB + 5OB = 14$, calculați-l pe x .

b) Dacă $3AO + 5BO = 16$, calculați-l pe x .

PE-PP Supermate ****

24. Se consideră două puncte M și N .

a) Reprezentați pe axa numerelor punctele M și N , astfel încât distanța de la M la originea axei să fie de 3 u.m. și distanța de la originea axei la N să fie egală cu 5 u.m.

b) Scrieți coordonatele punctelor M și N .

25. Pe axa numerelor se consideră punctele A și B de coordonate -11 și respectiv 44 . Se parcurge distanța dintre A și B .

a) Calculați ce procent din distanță s-a parcurs în momentul trecerii prin punctul M de coordonată 22 .

b) Ce coordonată trebuie să aibă punctul M pentru ca procentul parcurs din distanță să fie de 40% ?

PE-PP

1.2. Modulul unui număr întreg.

Compararea și ordonarea numerelor întregi



Se spune că un număr întreg a este **mai mare decât** 0 și notăm $a > 0$ dacă a este un număr întreg pozitiv.

Deci, $a \in \mathbb{Z}, a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}_+^*$.

Se spune că un număr întreg a este **mai mic decât** 0 și notăm $a < 0$ dacă a este un număr întreg negativ.

Deci, $a \in \mathbb{Z}, a < 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}_-^*$.

Modulul unui număr întreg pozitiv sau **valoarea absolută a unui număr întreg pozitiv** este **acel număr**, **modulul numărului întreg 0** este **0** și **modulul** sau **valoarea absolută a unui număr întreg negativ** este **opusul acelui număr**.

$$\text{Deci, } |z| = \begin{cases} z, & \text{dacă } z > 0 \\ 0, & \text{dacă } z = 0 \\ -z, & \text{dacă } z < 0 \end{cases}$$

Exemple: $|+2| = +2$; $|0| = 0$; $|-3| = -(-3) = +3 = 3$.

PROPRIETĂȚI:

- $|z| > 0$, oricare ar fi $z \in \mathbb{Z}^*$;
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $|z| \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $z \in \mathbb{Z}$;
- $|z| = |-z|$, oricare ar fi $z \in \mathbb{Z}$.

Pentru numere întregi avem **ordonarea**:

- $a \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow a < 0$;
- $a \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a > 0$;
- $a \in \mathbb{Z}_-$ și $b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a < b$;
- $a \in \mathbb{Z}_+, b \in \mathbb{Z}_+$ și $|a| < |b| \Rightarrow a < b$;
- $a \in \mathbb{Z}_-, b \in \mathbb{Z}_-$ și $|a| < |b| \Rightarrow a > b$.

Observație:

Dintre două numere întregi, întotdeauna, pe axa numerelor, cel mai mic se află la stânga celui mai mare.

1. Completați corect propozițiile:

- Valoarea absolută sau modulul unui număr întreg negativ este ...
- Valoarea absolută sau modulul unui număr întreg pozitiv este ...
- Un număr întreg x este mai mare decât 0 dacă ...
- Un număr întreg y este mai mic decât 0 dacă ...

2. a) Ordonați crescător numerele întregi: +5; -13; +2; -1; 0; +15; -10.

- b) Ordonați descrescător numerele întregi: -15; +32; 0; -4; 2; 5; -7.**

3. Precizați numerele întregi cuprinse între numerele:

- a) -3 și -11; b) -4 și +2; c) +2 și -5.

4. a) Scrieți toate numerele întregi mai mari decât -4 și mai mici decât 3.

- b) Scrieți 3 numere negative mai mari decât -10.**

5. a) Determinați $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât numerele: -3, -2, x , 3, 4 să fie ordonate crescător.

- b) Determinați $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât numerele: 3, 2, x , -3, -4 să fie ordonate descrescător.**

6. Completați tabelele de mai jos:

a)

a	-3	+6	-4	+11	-59	-101	0	7	-2	+3	-13
 a 											

b)

a	-5	0	+2	-11	7						-7
-a						-3	+5	-1	-4	+6	
 a 											

7. Aflați x , știind că $|x| = 5$.

8. Știind că $|x|$ este un număr întreg și $3 < |x| \leq 5$, aflați x .

9. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- $|-5| = |5|$;
- $|-11| > |9|$;
- $|-3| \leq |-2|$;
- $15 > |-15|$;
- $|-4| = 4$;
- $|7| > |-5| + |-4|$;
- $|-2| = -2$;
- $|+1| = -1$;
- $|+8| = 8$.

10. Scrieți în pătrat unul dintre simbolurile: „<”, „=”, „>”, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

- $|-3|$ 0;
- $|-5|$ $|-7|$;
- 9 $|-11|$;
- $|-14|$ 14;
- 0 $|-2|$;
- $|-16|$ $|-16|$;
- $+11$ $+7$;
- 19 -17 ;
- $+13$ -5 .

PE **Aplicare și exercitare ****

11. Determinați modulul următoarelor numere întregi:

$$+2, -4, +5, -3^2, 4 + 3, -7, -2, 0, (3^{2021} - 3^{2020} - 3^{2019}).$$

12. Calculați: $|-3|$; $|-5|$; $|3 + 2 - 4|$; $|-2|$; $|-3^2|$; $|-5^3|$; $|-7|^2$.

13. Ordonați crescător numerele:

$$a) -|5|; -(|-2|)^3; -|-3^2|; -|-3|; |-2019|^0; -|-1^{2019}|;$$

$$b) -14; 7 - 3; -|49 - 17|; -|-3|^{-3}; |-2|^{101}; |63 - 21|.$$

14. Ordonati descrescător numerele:

a) $-7; +2; 0; -11; +9; -4; 5;$ b) $|100^0|; +|-5|; -|-10|; -|-57|^0; |-3|^2; 7^{1-2}; -|-7|^2.$

15. Determinați cardinalul următoarelor mulțimi:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } |x| \leq 4\};$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^* \text{ și } -7 \leq x \leq 7\};$

$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } |x| + |x+1| = 0\};$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \text{ impar și } |x| < 7\}.$

16. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 5\}.$

Stabiliți care dintre următoarele relații sunt adevărate:

a) $A = B;$

b) $A \subset B;$

c) $B \subset A;$

d) $A \cap B = B.$

17. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 4\}; B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}.$

Calculați: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A.$

18. Fie mulțimile:

$A = \{+3, -4, +2, -5, 0\};$

$B = \{-7, +2, -5, +4, +3\};$

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \in A\};$

$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \in B\}.$

Calculați $C \cap D.$

19. Aflați numerele întregi x și y , știind că următoarele mulțimi sunt egale:

$\{2, |x|, 7, -8\} = \{-2|, 5, |y|, -8\}.$ Scrieți apoi mulțimile.

20. Determinați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

a) $|x| < 2;$

b) $|-x| \leq 3;$

c) $|x| \leq 0;$

d) $2 \leq |x| \leq 5.$

21. Determinați $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Z}$ astfel încât numerele întregi:

a) $-4, -3, x, y, 7$ să fie ordonate crescător;

b) $4, 2, y, -2, -4$ să fie ordonate descrescător.

22. Determinați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

a) $|x| = +2;$

b) $|-x| = +3;$

c) $|x| = 0;$

d) $|x| = -4.$

23. Fie mulțimile $M = \{3, -4, 0, 2\}, N = \{11, +3, 7, -2\}, A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \in M\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \in N\}.$ Sunt disjuncte mulțimile A și B ?

24. Determinați $x \in \mathbb{Z}$, știind că:

a) $|x - 3| = 0;$

b) $|x - 2| + |3x - 6| = 0;$

c) $|x| + |x - 4| = 0;$

d) $|x - 2020| - |-2021| = 0;$

e) $|x| + 2005 \cdot (|x| + 1) = 4\,011.$

25. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) pentru orice $x \in \{-2, -1, 1, 2\}, |x| \leq 3;$

b) pentru orice $x \in \{1, 2\}, |x| \leq 2;$

c) Dacă $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^* \text{ și } |x| \leq 2\}$ și $B = \{-2, -1, 1, 2\}$, atunci $A = B;$

d) Dacă $A = \{-1, 0, 1\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } |x| \leq 4\}$, atunci $A \subset B;$

e) $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } |x| \leq 7\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } |x| \geq 7\} = \emptyset.$

PE Aprofundare și performanță ***

26. Determinați elementele mulțimilor: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 4 \text{ și } |x| = -x\},$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 4 \text{ și } |x| = x\}, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \cup B.$

27. Fie mulțimea $M = \{-4, 3, 5, 10, -1, 0, -12, -8, 11\}$.

Determinați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \mid x \in M \text{ și } |x| = -x\}$;

b) $B = \{x \mid x \in M \text{ și } |x| = x\}$;

c) $C = \{x \mid x \in M \text{ și } |x| \leq 7\}$;

d) $D = \{x \mid x \in M \text{ și } |x| > 5\}$.

28. Determinați valoarea maximă a expresiei:

a) $E(x) = 7 - |x|$;

b) $E(x) = 11 - |3 - x|$;

c) $E(x) = 4 - (x - 1)^2$;

d) $E(x) = 2 - (x - 2)^2$.

29. Determinați valoarea minimă a expresiei:

a) $E(x) = |x| + 7$, unde $x \in \mathbb{Z}$;

b) $E(x) = |x - 3| + 2$, unde $x \in \mathbb{Z}$;

c) $E(x) = (x - 1)^2 + 2$, unde $x \in \mathbb{Z}$;

d) $E(x) = 5 + (x - 3)^2$.

30. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $|x - 1| < |x - 2|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

b) $|x - 1| > |x - 3|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

c) Există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|x| = x$.

d) Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, avem $|x| = x$.

e) Există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|x| = -x$.

f) Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ și $x < y$, atunci $|x| < |y|$.

31. Calculați:

a) $|x| + |-5 + x| - |-3| + |7|$, pentru $x \in \mathbb{Z}$, x negativ;

b) $|-x| + |3 - x| + |-7| - |5|$, pentru $x \in \mathbb{Z}$, x negativ.

32. Se consideră mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2019\}$. Calculați cardinalul mulțimii M .

33. Comparați numerele $a = (2^{111} + |2^{111} - 3^{74}|) : 3^{73}$ și $b = (4^{74} + |3^{111} - 4^{74}|) : 3^{110}$.

PE-PP

Supermate ****

34. Calculați câte numere cu coordonate numere întregi pot fi reprezentate pe o axă a numerelor între punctele $A(-2013)$ și $B(+2013)$.

35. Se consideră mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 2n - 1\}$.

a) Determinați n , știind că mulțimea M are 8 elemente.

b) Scrieți cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii M .

36. Fie $A \subset \mathbb{Z}$ o mulțime cu șase elemente și $B = \{|x| \mid x \in A\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) Arătați că în A există două numere opuse.

b) Determinați toate mulțimile A care verifică datele problemei și în care există cel mult două numere negative.

Etapa locală, Bacău

37. a) Câte numere are mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 169\}$?

b) Care este cel mai mic $x \in A$, cu proprietatea că $x : 3$?

Etapa locală, Dâmbovița